|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/1/20+ ②

Ens: Prof. Marco Picasso

Analyse numérique et optimisation - XXX

11 Août 2020

de 08h15 à 11h15

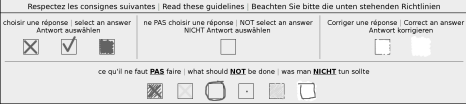
XXX-9

SCIPER : FAKE-9

201

Attendez le début de l’épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso. Ne pas dégrafer.

| • Posez votre carte d’étudiant sur la table.  • Aucun document n’est autorisé.  • L’utilisation d’une calculatrice et de tout outil électronique est interdite pendant l’épreuve. • Pour les questions à choix multiple il y a une ou plusieurs réponses correctes. On comptera : +1/N points si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes, 0 point si vous ne cochez rien,  −1/M point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.  • Pour les questions de type vrai-faux, on comptera :  +1 point si vous cochez la réponse correcte,  0 point si vous ne cochez rien,  −1 point si vous cochez la réponse incorrecte.  • Utilisez un stylo à encre noire ou bleu foncé et effacez proprement avec du correcteur blanc si nécessaire.  • Il y a 33 questions à choix multiple ou questions vrai-faux et 14 points répartis sur deux questions à rédiger.  • Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document. |
| --- |

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/2/19+ ②

Questions à choix multiple et vrai-faux

Pour chaque question mettez une croix dans les cases correspondant à des réponses correctes sans faire de ratures.

Soit n un entier positif. On cherche �x∗ ∈ Ω tel que f(�x∗) ≤ f(�x) ∀ �x ∈ Ω où f(�x) = x1 +x2 +· · ·+xn−1 −xn et Ω = {�x ∈ Rn tel que xi ≥ 0, i = 1, . . . , n et x1 + x2 + · · · + xn = 1}.

Soit L le lagrangien défini ∀ �x ∈ Rn, ∀ �λ ∈ Rn, ∀ µ ∈ R par

L(�x, �λ, µ) = f(�x) − (λ1x1 + · · · + λnxn) − µ(x1 + · · · + xn − 1).

Question 1 : Soit �c ∈ Rn défini par ci = 1, i = 1, . . . , n − 1 et cn = −1. On a pour i = 1, . . . , n ∂L

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

∂xi(�x, �λ, µ) = ci − λi − µ ∂L

∂xi(�x, �λ, µ) = −ci + λi + µ ∂L

∂xi(�x, �λ, µ) = ci + λi + µ ∂L

∂xi(�x, �λ, µ) = ci + λi − µ

Les conditions KKT s’écrivent: trouver �x∗ ∈ Rn, �λ∗ ∈ Rn, µ∗ ∈ R tels que

F� (�x∗, �λ∗, µ∗) = �0 (1)

�λ∗ ≥ �0 (2)

�x∗ ≥ �0 (3)

où F� est défini pour tout �x ∈ Rn, �λ ∈ Rn, µ ∈ R par

F� (�x, �λ, µ) =

Question 2 : A la place de ??? il faut écrire



???

x1 + · · · + xn − 1 λ1x1

...

λnxn

 

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

�c + �λ + µ�1 −�c + �λ + µ�1 �c − �λ − µ�1 �c + �λ − µ�1

On implémente la méthode des points intérieurs pour approcher la solution de (1) (2) (3). A chaque étape on effectue un pas de la méthode de Newton pour tenir compte de (1). Le fichier exam3.m implémente la méthode.

Fichier exam3.m:

function x\_new=exam3(n,eps)

c=ones(n,1);

c(n)=-1;

x\_old=max(eps,zeros(n,1));

lambda\_old=max(eps,zeros(n,1));

mu\_old=0;

for iter=1:10

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/3/18+ ②

mat1 = horzcat(sparse(n,n),-speye(n,n),-???);

mat2 = horzcat(ones(1,n),sparse(1,n),sparse(1,1));

mat3 = horzcat(sparse(1:n,1:n,lambda\_old,n,n),???,sparse(n,1));

mat = vertcat(mat1,mat2,mat3);

rhs1 = ???;

rhs2 = ones(1,n)\*x\_old-1;

rhs3 = sparse(n,1);

for i=1:n

rhs3(i)=???;

end

rhs = vertcat(rhs1,rhs2,rhs3);

sol=mat\rhs;

x\_new=max(eps,x\_old-sol(1:n));

lambda\_new=max(eps,lambda\_old-sol(n+1:2\*n));

mu\_new=mu\_old-sol(2\*n+1:2\*n+1);

discrep=norm(x\_new-x\_old)/norm(x\_new);

printf ("iter: %d Discrepancy: %f \n",iter,discrep);

x\_old=x\_new;

lambda\_old=lambda\_new;

mu\_old=mu\_new;

if (discrep<0.001)

break

end

end

end

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/4/17+ ② Question 3 : A la ligne mat1= . . . il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

ones(1,n) zeros(1,n) zeros(n,1) ones(n,1)

Question 4 : A la ligne mat3= . . . il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

speye(n,n)

sparse(1:n,1:n,x\_old,n,n) ones(n,n)

zeros(n,n)

Question 5 : A la ligne rhs1=??? il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

c-ones(n,1)\*mu\_old-lambda\_old c+ones(n,1)\*mu\_old-lambda\_old -c+ones(n,1)\*mu\_old+lambda\_old c+ones(n,1)\*mu\_old+lambda\_old

Question 6 : A la ligne rhs3(i)=??? il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

-lambda\_old(i)

x\_old(i)\*lambda\_old(i) -x\_old(i)

-x\_old(i)\*lambda\_old(i)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/5/16+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/6/15+ ②

Soit m, n deux entiers positifs, m ≥ n, A ∈ Rm×n, on considère la décomposition en valeurs singulières de A (SVD), A = UΣV T où Σ ∈ Rm×n est une matrice diagonale de coefficients diagonaux σ1 ≥ σ2 ≥ · · · ≥ σn ≥ 0 et où UUT = UTU = I et V V T = V T V = I. On note �uk la ke colonne de U, �vk la ke colonne de V . Question 7 : On a:

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

AT AV = V ΣT Σ

AAT �vi = σ2i �vi i = 1, . . . , n AT A�vi = σ2i �vi i = 1, . . . , n AAT V = V ΣT Σ

Question 8 : Le coefficient Aij i = 1, . . . , m j = 1, . . . , n est donné par:

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

Aij = �n k=1

Aij = �n k=1

Aij = �n k=1

Aij = �n k=1

σkUikVjk σk(�uk�vTk )ij σkUkiVkj σk(�vk�uTk )ij

où, étant donné deux vecteurs �a et �b, on note �a�bT la matrice de coefficient i, j : (�a�bT )ij = aibj . Question 9 : Soit A la matrice définie par

A =

 

1 1 1 1 1 1



 .

Sachant que la SVD de A donne σ1 > 0 et σ2 = 0, on a A = σ1�u1�vT1 .

|  |
| --- |

VRAI FAUX

|  |
| --- |

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/7/14+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/8/13+ ② On considère le problème suivant : trouver �x ∈ RN tel que F� (�x) = �0 où F� : RN → RN est définie par

F� (�x) = (N + 1)2





2 −1 (0) 

−1 ... ...

... ... ...

... ... −1

(0) −1 2



x1

x2...

xN−1

xN



+



(x1)3 − 1

(x2)3 − 1

...

(xN−1)3 − 1 (xN )3 − 1



.

Question 10 : La matrice jacobienne est définie ∀ �x ∈ RN par :





avec

DF(�x) = (N + 1)2



2 −1 (0)

−1 ... ...

... ... ...

... ... −1

(0) −1 2



+



d1 (0)

d2

...

...

(0) dN

|  |
| --- |

|  |
| --- |

di = 3x2i

di = (xi)3 − 1

Question 11 : Si �x et �y ∈ RN sont tels que F� (�x) = 0 et F� (�y) = �0 on a:

|  |
| --- |

(N + 1)2(�x − �y)T



2 −1 (0)

−1 ... ...

... ... ...

... ... −1



(�x − �y) +�N i=1

((xi)3 − (yi)3)(xi − yi) = 0



(0) −1 2



|  |
| --- |

|  |
| --- |

(N + 1)2(�x − �y)T �x = �y

2 −1 (0)

−1 ... ...

... ... ...

... ... −1

(0) −1 2

(�x − �y) ≤ 0

Le fichier exam1.m implémente la méthode de Newton pour approcher �x.

Fichier exam1.m:

function[x] = exam1(N)

%

% Methode de Newton : Etant donne x^n, trouver x^{n+1}

% tel que DF(x^n)(x^n - x^{n+1}) = F(x^n)

% En pratique on construit A=DF(x^n), b=F(x^n)

% on resout Ay=b (decomposition LL^T de A) et on pose x^{n+1}=x^n-y

%

% parametres

%

% N : nombre d inconnues du systeme non lineaire

% a : N-vecteur, diagonale de A, puis diagonale de L telle que A=LL^T ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/9/12+ ②

% c : (N-1)-vecteur, sous-diagonale de A, puis sous-diagonale de L % b : N-vecteur, second membre de Ay=b, puis solution de Ay=b

% x : N-vecteur, contient x^n puis x^{n+1}

%

for i=1:N

x(i) = 1;

end

stop=1;

iter=0;

coeff=(N+1)\*(N+1);

while stop>1e-10

iter=iter+1;

for i=1:N

a(i) = 2\*coeff+???;

end

for i=1:N-1

c(i) = -coeff;

end

b(1) = coeff\*(2\*x(1)-x(2))+???;

for i=2:N-1

b(i) = coeff\*(2\*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???;

end

b(N) = coeff\*(2\*x(N)-x(N-1))+???;

% Decomposition de Cholesky de la matrice A

a(1) = ???;

for i=1:N-1

c(i) = c(i)/???;

a(i+1) = sqrt(a(i+1)-???);

end

% Resolution du systeme lineaire Ly = b, puis L^T x = y

b(1)=???;

for i=1:N-1

b(i+1) = (b(i+1)-???)/a(i+1);

end

% resolution du systeme lineaire L^T x = y

b(N)=???;

for i=N-1:-1:1

b(i) = (b(i)-???)/a(i);

end

%x^n+1 = x^n - y

for i=1:N

x(i) = x(i) - b(i);

end

% calcul de ||b||/||x||

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/10/11+ ②

stop=norm(b)/norm(x);

fprintf(’iter=%i, stop = %e \n’,iter,stop)

end

end

Question 12 : A la ligne a(i)=2\*coeff(i)+???, il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

3\*x(i)\*x(i)-1 3\*x(i)\*x(i)

x(i)\*x(i)\*x(i) x(i)\*x(i)\*x(i)-1

Question 13 : A la ligne b(i)=coeff\*(2\*x(i)-x(i-1)-x(i+1))+???, il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

x(i)\*x(i)\*x(i)-1 x(i)\*x(i)\*x(i) 3\*x(i)\*x(i)-1 3\*x(i)\*x(i)

Question 14 : A la ligne c(i)=c(i)/???, il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

a(i+1) a(i)

b(i+1) b(i)

Question 15 : A la ligne a(i+1)=sqrt(a(i+1)-???), il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

c(i)\*c(i) a(i)\*c(i) a(i)\*a(i)

Question 16 : A la ligne b(i+1)=(b(i+1)-???)/a(i+1), il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

a(i)\*b(i) a(i+1)\*b(i) c(i)\*b(i)

Question 17 : A la ligne b(i)=(b(i)-???)/a(i), il faut remplacer ??? par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

c(i)\*b(i+1) c(i)\*b(i) a(i)\*b(i+1) a(i)\*b(i)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/11/10+ ②

Question 18 : Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants

>> exam1(9);

iter=1, stop = 3.580783e+00

iter=2, stop = 1.274647e+00

iter=3, stop = 1.123099e-02

iter=4, stop = 4.868424e-07

iter=5, stop = 9.555565e-16

>> exam1(19);

iter=1, stop = 3.720121e+00

iter=2, stop = 1.277933e+00

iter=3, stop = 1.123106e-02

iter=4, stop = 4.834302e-07

iter=5, stop = 1.710970e-15

>> exam1(39);

iter=1, stop = 3.791584e+00

iter=2, stop = 1.278749e+00

iter=3, stop = 1.123128e-02

iter=4, stop = 4.825987e-07

iter=5, stop = 6.741537e-16

On en déduit

La méthode de Newton converge quadratiquement pour ce point de départ

|  |
| --- |

La méthode de Newton converge quadratiquement quel que soit le point de départ

|  |
| --- |

La méthode de Newton diverge pour ce point de départ

|  |
| --- |

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/12/9+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/13/8+ ② On considère le problème suivant: trouver u : [0, 1] × [0, +∞[→ R telle que



∂2u

∂t2 (x, t) = ∂2u

∂x2 (x, t), 0 < x < 1, t > 0,

u(x, 0) = sin(πx), 0 < x < 1, 

∂u

∂t(x, 0) = 0, 0 < x < 1, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, t > 0.

Question 19 : La solution du problème est donnée par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

u(x, t) = sin(πx)eπt

u(x, t) = sin(πx)e−πt

u(x, t) = sin(πx)(1 + sin(πt)) u(x, t) = sin(πx) cos(πt)

Soit N un entier positif, h = 1

N+1 , xi = ih, i = 0, . . . , N +1. Soit τ > 0 le pas de temps, tn = nτ , n = 0, 1, . . ..

On note uni une approximation de u(xi, tn) obtenue en utilisant des formules de différences finies centrées pour approcher ∂2u

∂t2 , ∂2u

Fichier exam2.m:

∂x2 et∂u∂t. Le fichier exam2.m implémente ce schéma.

function [u2]=exam2(N,M,tau)

%

% Schema explicite centre pour l’equation des ondes

%

% parametres

%

% N : nombre de points interieurs dans l’intervalle [0,1]

% h : pas d’espace

% M : nombre de pas de temps

% tau : pas de temps

% t : temps courant

% u0 : N-vecteur, u0(i) est une approximation de u(x\_i,t\_n-1)

% u1 : N-vecteur, u1(i) est une approximation de u(x\_i,t\_n)

% u2 : N-vecteur, u2(i) est une approximation de u(x\_i,t\_n+1)

%

h=1./(N+1);

lambda=???;

%

% condition initiale u0 et u1

%

for i=1:N

u0(i)=sin(pi\*i\*h);

end

u1(1)=???;

for i=2:N-1

u1(i)=???;

end

u1(N)=???;

%

% schema

%

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/14/7+ ②

t=tau;

for n=2:M

t=t+tau;

u2(1)=???;

for i=2:N-1

u2(i)=???;

end

u2(N)=???;

%

% reactualiser la solution

%

for i=1:N

u0(i)=u1(i);

u1(i)=u2(i);

end

end

%

% imprimer l’erreur maximum au temps final

%

err = 0;

for i=1:N

erri = abs(u2(i)-sin(pi\*i\*h)\*???);

if (erri>err)

err = erri;

end

end

fprintf(’ erreur maximum au temps final %e \n’,err)

Question 20 : A la ligne lambda=??? il faut écrire

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

tau/h

tauˆ2/hˆ2 tau/hˆ2 tauˆ2/h

Question 21 : A la ligne u1(i)=??? il faut écrire

(1-lambda)\*u0(i)+lambda\*(u0(i-1)+u0(i+1))

|  |
| --- |

2\*(1-lambda)\*u0(i)+lambda/2\*(u0(i-1)+u0(i+1))

|  |
| --- |

2\*(1-lambda)\*u0(i)+lambda\*(u0(i-1)+u0(i+1))

|  |
| --- |

(1-lambda)\*u0(i)+lambda/2\*(u0(i-1)+u0(i+1))

|  |
| --- |

Question 22 : A la ligne u2(i)=??? il faut écrire

(1-lambda)\*u1(i)+lambda/2\*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)

|  |
| --- |

(1-lambda)\*u1(i)+lambda\*(u1(i-1)+u0(i+1))-u0(i)

|  |
| --- |

2\*(1-lambda)\*u1(i)+lambda/2\*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)

|  |
| --- |

2\*(1-lambda)\*u1(i)+lambda\*(u1(i-1)+u1(i+1))-u0(i)

|  |
| --- |

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/15/6+ ②

>> u=exam2(9,200,0.1);

erreur maximum au temps final 1.776357e-15

>> u=exam2(9,200,0.11);

erreur maximum au temps final 3.639871e+54

>> u=exam2(19,200,0.05);

erreur maximum au temps final 2.775558e-15

>> u=exam2(19,200,0.051);

erreur maximum au temps final 8.657832e+15

Question 23 : On en déduit

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

Le schéma converge à l’ordre h + τ . Le schéma est stable ∀ h, τ > 0. Le schéma converge à l’ordre h2 + τ 2. Le schéma est stable si τ ≤ h.

Après avoir complété le fichier on obtient les résultats suivants:

>> u=exam2(9,10,0.09);

erreur maximum au temps final 6.903714e-04 >> u=exam2(19,20,0.045);

erreur maximum au temps final 1.711472e-04 >> u=exam2(39,40,0.0225);

erreur maximum au temps final 4.269724e-05 >> u=exam2(79,80,0.01125);

erreur maximum au temps final 1.066873e-05 Question 24 : On en déduit

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

Le schéma converge à l’ordre h + τ . Le schéma converge à l’ordre h2 + τ 2. Le schéma est stable ∀ h, τ > 0. Le schéma est stable si τ ≤ h.

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/16/5+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/17/4+ ② Soit α, β > 0, n un entier positif, A ∈ R(2n+1)×(2n+1) et �b ∈ R2n+1 définis par:

A = (2n + 2)2



2 −1 (0)

−1 ... ...

... ... ...

... ... −1

(0) −1 2



, �b =1...1 .

On cherche (�x∗, �q∗) ∈ Ω tel que f(�x∗, �q∗) ≤ f(�x, �q) ∀ (�x, �q) ∈ Ω, où f(�x, �q) = α2 ||�q||2 + 12 (xn+1 − β)2 et Ω = {(�x, �q) ∈ R2n+1 × R2n+1; A�x −�b = �q}.

On introduit le lagrangien défini par L(�x, �q, µ�) = f(�x, �q) − µ� T (A�x −�b − �q) ∀ �x, �q, µ� ∈ R2n+1, les conditions KKT s’écrivent (après avoir éliminé µ� ∗):

� A B

C αAT

Question 25 : La matrice B est donnée par

� � �x∗ �q∗

�

=

� �b �d

�

.

Bn+1,n+1 = −1, Bi,j = 0 si (i, j) �= (n + 1, n + 1) i, j = 1, . . . , 2n + 1

|  |
| --- |

B = −I

|  |
| --- |

Bn+1,n+1 = 1, Bi,j = 0 si (i, j) �= (n + 1, n + 1) i, j = 1, . . . , 2n + 1

|  |
| --- |

B = I

|  |
| --- |

Question 26 : La matrice C est donnée par

Cn+1,n+1 = −1, Ci,j = 0 si (i, j) �= (n + 1, n + 1) i, j = 1, . . . , 2n + 1

|  |
| --- |

C = I

|  |
| --- |

C = −I

|  |
| --- |

Cn+1,n+1 = 1, Ci,j = 0 si (i, j) �= (n + 1, n + 1) i, j = 1, . . . , 2n + 1

|  |
| --- |

Question 27 : Le vecteur �d est donné par

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

�d = C�b

�d = βC�b �d = �b

�d = −�b

�d = −βC�b �d = −C�b

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/18/3+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/19/2+ ② Soit f : [0, 1] → R une fonction continue donnée. On cherche u : [0, 1] → R telle que :



−u��(x) = f(x), 0 < x < 1,

u(0) = 0,



u�(1) = 0.

Question 28 : La formulation faible du problème consiste à trouver u ∈ V telle que

� 1

f(x)v(x)dx, ∀ v ∈ V,

0

où V est défini par :

�

u�(x)v�(x)dx =

� 1

0

�

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

V = V = V = V =

g : [0, 1] → R continue, g� continue par morceaux, g(0) = g(1) = 0�

�

g : [0, 1] → R continue, g� continue par morceaux, g(0) = 0�

�

g : [0, 1] → R continue, g� continue par morceaux, g(1) = 0�

�

g : [0, 1] → R continue, g� continue par morceaux

Question 29 : Soit N un entier positif, h = 1/(N + 1), xi = ih, i = 0, 1, . . . , N + 1. On considère les fonctions “chapeaux” ϕi(x), i = 0, 1, . . . , N + 1, continues, polynômiales de degré 1 sur chaque intervalle telles que :

ϕi(xi) = 1, ϕi(xj ) = 0 si j �= i, j = 0, 1, . . . , N + 1.

L’approximation des élements finis correspondante consiste à chercher uh ∈ Vh telle que

� 1

f(x)vh(x)dx, ∀ vh ∈ Vh,

0

où Vh est défini par :

u�h(x)v�h(x)dx =

� 1 0

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

Vh = span(ϕ1, ϕ2, . . . , ϕN+1) Vh = span(ϕ0, ϕ1, ϕ2, . . . , ϕN+1) Vh = span(ϕ0, ϕ1, ϕ2, . . . , ϕN ) Vh = span(ϕ1, ϕ2, . . . , ϕN )

Question 30 : D’autre part, uh est défini par :

|  |
| --- |

uh(x) = �N j=0

ujϕj (x)

|  |
| --- |

uh(x) =

N�+1 j=1

ujϕj (x)

|  |
| --- |

uh(x) = �N j=1

ujϕj (x)

|  |
| --- |

uh(x) =

N�+1 j=0

ujϕj (x)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/20/1+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/21/60+ ② � 1

Soit g : [−1, 1] → R une fonction continue, on approche −1

g(t)dt à l’aide de la formule de quadrature:

J(g) = g(−α) + g(α), où 0 < α < 1. (1)

Question 31 : On a :

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

|  |
| --- |

Pour α = 1~~√~~3, on a � 1−1p(t)dt = J(p) ∀ p ∈ P3. Pour α = 1~~√~~3, on a � 1−1p(t)dt = J(p) ∀ p ∈ P2. Pour α = 1~~√~~3, on a � 1−1p(t)dt = J(p) ∀ p ∈ P5. Pour α = 1~~√~~3, on a � 1−1p(t)dt = J(p) ∀ p ∈ P4. � 1

|  |
| --- |

Pour tout 0 < α < 1 on a −1

p(t)dt = J(p) ∀ p ∈ P1.

Question 32 : Soit f : [0, 1] → R une fonction continue, N un entier positif, h = 1/N, xi = ih,

i = 0, 1, . . . , N. On a� 1 0

f(x)dx = h2N�−1 i=0

� 1 −1

f(xi + ht + 1

2 )dt. (2)

|  |
| --- |

VRAI FAUX

|  |
| --- |

Question 33 : On approche les intégrales de −1 à 1 dans (2) en utilisant la formule de quadrature (1) avec α = 1~~√~~3; On obtient ainsi l’approximation Lh(f). On a

|  |
| --- |

Lh(f) = h2N�−1 i=0

�

f

�

xi +

√3 − 1 2~~√~~3h

�

+ f

�

xi +

√3 + 1 2~~√~~3h

��.

|  |
| --- |

|  |
| --- |

∃ C > 0, ∀ f ∈ C4[0, 1], ∀ 0 < h ≤ 1 on a ����� 1

0

∀ f ∈ C4[0, 1], ∃ C > 0, ∀ 0 < h ≤ 1: ����� 1

0

f(x)dx − Lh(f) f(x)dx − Lh(f)

����≤ Ch4. ����≤ Ch4.

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/22/59+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/23/58+ ②

Questions à rédiger

Répondre dans l’espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

Question ouverte 1: Cette question est notée sur 5 points.

| Réservé au correcteur  0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0 | |
| --- | --- |
|  |  |

~~On considère le problème suivant : trouver u :~~ ~~[0, 10] → R telle que~~



u�(t) + u(t) = 0, 0 < t ≤ 10,



u(0) = 1.

(a) Donner une formule pour u(t), 0 < t ≤ 10.

(b) Soit N un entier positif, h = 10/N, tn = nh, n = 0, 1, . . . , N. On note un l’approximation de u(tn) obtenue en utilisant une formule de différences finies progressive (schéma d’Euler progressif, explicite). Ecrire le schéma correspondant.

(c) Montrer que ∀ x > 0 :

|e−x − (1 − x)| ≤x22

(d) En déduire que

|u(tN ) − uN | ≤h22�1 + |1 − h| + · · · + |1 − h|N−1�

(e) Montrer que ∀ 0 < h ≤ 2, on a

|u(tN ) − uN | ≤ 5h.

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/24/57+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/25/56+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/26/55+ ②

Question ouverte 2: Cette question est notée sur 9 points.

| 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5  Réservé au correcteur  5.0 5.5 6.0 6.5 7.0 7.5 8.0 8.5 9.0 | |
| --- | --- |
|  |  |

On ~~considère le problème suivant : trouver u :~~ ~~[0, 1] → R telle que~~



−u��(x) = ex, 0 < x < 1,



u(0) = 0, u(1) = 0.

Soit N un entier positif, h = 1/(N + 1), xi = ih, i = 0, 1, . . . , N + 1. On note ui l’approximation de u(xi) obtenue avec l’aide d’une méthode de différences finies centrées.

(a) Ecrire le schéma permettant de calculer ui, i = 1, . . . , N.

(b) Ecire le système linéaire correspondant A�u = �f où �u ∈ RN est le vecteur de composantes ui, A et f sont à définir.

(c) On suppose dans la suite que u ∈ C4[0, 1], montrer que :

−u(xi−1) + 2u(xi) − u(xi+1)

h2 = exi+ ri, i = 1, . . . , N,

où ri est à définir. Montrer ∃ C > 0, ∀ 0 < h ≤ 1, |ri| ≤ Ch2.

(d) Soit w� ∈ RN le vecteur de composantes u(xi). En déduire que

A (w� − �u) = �r.

(e) On admet le résultat suivant : ∀ �g ∈ RN , si �v est tel que A�v = �g, alors :

1≤i≤N |vi| ≤18max

max

1≤i≤N |gi|.

En déduire que :

1≤i≤N |u(xi) − ui| ≤18Ch2. max

(f) Soit L : RN → R définie ∀ �v ∈ RN par

L(�v) = 12�vT A�v − �fT �v.

Montrer que

L(�v) = L(�u) + (�v − �u)T (A�u − �f) + 12 (�v − �u)T A (�v − �u) ∀ �v ∈ RN .

On admet que A est symétrique définie positive. En déduire que L(�v) ≥ L(�u) ∀ �v ∈ RN . ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/27/54+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/28/53+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/29/52+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/30/51+ ② ② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/31/50+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

② +201/32/49+ ② cette page n’est pas corrigée. (Brouillon)

② ②